2014 S.-T Yau College Math Contests 概率口试题（团体）

1. 设 X 和 Y 为两个相互独立的随机变量，其中 Y 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，X 服从二项分布，且 $P(X=0)=P(X=1/2)=1/2$. 令 $W=Y/2+X$,

(1) 证明 W 也服从 $(0,1)$ 上的均匀分布；

(2) 求 $E[Y|W]$.

2. 设 X_n 是 n 维标准高斯随机向量．证明下述概率当 n 趋于无穷大时趋于 1：

$$P\big(\sqrt{n}(1-\epsilon)\le \|X_n\|\le \sqrt{n}(1+\epsilon)\big).$$

3. 设 (X,Y) 和 (Y',Z) 为两个离散值随机向量，且 Y 和 Y' 有相同分布。证明存在随机向量 $(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})$，使得 $(\hat{X},\hat{Y})$ 和 $(\hat{Y},\hat{Z})$ 分别与 (X,Y) 和 (Y',Z), 有相同分布。

4. 设 (ξ_n) 为一列相互独立随机变量，满足 $P(\xi_n=1)=p_n, P(\xi_n=0)=1-p_n$. 假定 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k p_{k+1}<\infty$, 证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\xi_{k+1}$ 几乎处处收敛。